ELECTROMAGNETISMO Septiembre 2013- Reserva

INSTRUCCIONES: El examen consta de dos partes: Teoría (7ptos) y Problemas (3ptos). Para aprobar es necesario, pero no suficiente, obtener al menos 3ptos en la parte de Teoría y 1,5ptos en la de Problemas. **MATERIAL:** Calculadora no programable.

TEORIA: Conteste a las siguientes preguntas. Procure ser claro y conciso, utilece la carilla de una hoja como máximo para cada pregunta.

1. Entre las placas de un condensador cilíndrico de radios a y b (a<b) e indefinido en la dirección Z, existe un campo eléctrico de la forma

$$\mathbf{E} = A \operatorname{sen} \varphi/2 \cos(\omega t)\, \mathbf{u}_\rho$$

¿Existen cargas libres en la región entre conductores? En caso afirmativo determine la carga por unidad de longitud.

¿Se puede expresar el campo **E** como gradiente de un escalar? ¿Existe campo magnético?

2.- Explique el principio físico que describe la siguiente expresión y explique el significado físico de cada uno de los términos

$$\int_V \mathbf{E}' \cdot \mathbf{J} dV = \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})\, dV + \int_V \frac{\mathbf{J}^2}{\gamma} dV + \oint (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s}$$

3.-Corriente de desplazamiento. Fundamento, expresión y significado físico.

PROBLEMAS. Elija un problema de entre los dos propuestos. (sólo se corregirá un problema. Si un alumno hace los dos, sólo se corregirá el primero)

PROBLEMA 1: Considere un array de infinitas láminas conductoras situadas en el plano $Z = 0$. Cada lámina tiene una anchura $a/2$ en la dirección X y una longitud infinita en la dirección Y. Las láminas se encuentran alternativamente a potencial $+V$ y $-V$. Encontrar el potencial en la región $z > 0$ (3 puntos).

PROBLEMA 2: Calcular el potencial en el interior del recinto de la figura, sabiendo que se verifica $V(x, y) = 0$ para $y = 0$; $V(x, y) = 0$ para $y = b$ y

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \qquad y \qquad \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=a} = E_o$$

FORMULARIO

(1) Operaciones diferenciales vectoriales

Gradiente

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{u}_z \quad ; \quad \nabla U = \frac{\partial U}{\partial \rho}\mathbf{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\mathbf{u}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{u}_z$$

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\mathbf{u}_\varphi$$

Divergencia

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad ; \quad \nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

Rotacional

$$\nabla\times\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad ; \quad \nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \mathbf{u}_\rho & \rho\mathbf{u}_\varphi & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial \rho & \partial/\partial \varphi & \partial/\partial z \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & r\mathbf{u}_\theta & (r\sin\theta)\mathbf{u}_\varphi \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \varphi \\ A_\rho & rA_\theta & (r\sin\theta)A_\varphi \end{vmatrix}$$

(2) Ecuación de los potenciales

$$\nabla^2\mathbf{A} - \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}+\mu_o\varepsilon_o\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = -\mu_o\mathbf{J}$$

$$\nabla^2\phi + \frac{\partial\phi}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

(3) Desarrollo de Fourier

$$F(x) = a_o/2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\pi x/L) + b_n\sin(n\pi x/L)\right]$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} F(x)\cos(n\pi x/L)\,dx \quad ; \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} F(x)\sin(n\pi x/L)\,dx$$

(4) Ecuación de Laplace en c. cartesianas

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \quad ; \quad k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0$$

$$k_x^2 > 0 \Rightarrow \quad X = A_1\exp(k_x x) - A_2\exp(-k_x x) = A_3\sinh k_x x + A_4\cosh k_x x$$

$$\phi = k_1 \ln r + k_2$$

(b) Invarianza longitudinal

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0$$

$$\phi = \left(C_1 r^n + C_2 r^{-n}\right)\left(A_1 \cos n\varphi + A_2 \operatorname{sen} n\varphi\right)$$

o bien , si $n = 0$

$$\phi = \left(k_1 \ln r + k_2\ \right)\left(A_1\varphi + B_2\right)$$

(c) Simetría axial

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\phi = \left(B_1 J_0(kr) + B_2 N_0(kr)\right)\left(A_1 \cosh kz + A_2 \sinh kz\right)$$

ó

$$\phi = \left(C_1 I_0(kr) + C_2 K_0(kr)\right)\left(D_1 \cos kz + D_2 \operatorname{sen} kz\right)$$

(6) **Ecuación de Laplace en c. esféricas**

$$\triangle\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$

(a) Simetría alrededor de z

$$\phi = \left(A_1 r^n + A_2 r^{-(n+1)}\right) P_n(\cos\theta)$$

(b) Asimetría total

$$\phi = \left(B_1 r^n + B_2 r^{-(n+1)}\right)\left(A_1 \cos m\varphi + A_2 \operatorname{sen} m\varphi\right) P_n^m(\cos\theta)$$

— —

Funciones de Bessel de primera especie y orden cero

$$J_o(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{(m!)^2}$$

$$N_o(x) = \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{\gamma x}{2}\right) J_o(x) - \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{(m!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots\frac{1}{m}\right)$$

Funciones de Bessel modificadas o de argumento imaginario

$$I_o(x) = J_o(jx) \qquad ; \qquad K_o(x) = N_o(jx)$$

Polinominos de Legendre

$$P_m(\cos\theta) = \frac{1}{2^m m!}\left[\frac{d}{d(\cos\theta)}\right]^m \left(\cos^2\theta - 1\right)^m$$

$$P_o(\cos\theta) = 1$$

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta$$

ELECTROMAGNETISMO F.I.A. (2ºPP) Septiembre 13 - Reserva

INSTRUCCIONES: El examen consta de dos partes: Teoría (6ptos) y Problemas (4ptos). Para aprobar será necesario, obtener al menos 3ptos en la parte de Teoría y 2ptos en la de Problemas. MATERIAL: Calculadora no programable y Carta de Smith.

TEORIA

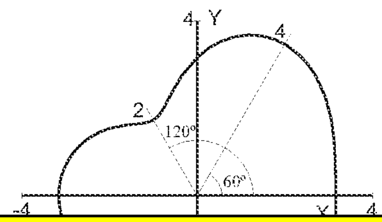
1.- Tenemos dos antenas de cuadro, A y B, siendo el radio de la antena A el doble que el radio de la antena B. Queremos emitir el mismo canal por ambas antenas. Sabiendo que la resistencia de radiación de una antena de cuadro es proporcional a la potencia cuarta de (b/λ), siendo b el radio de la antena y que la intensidad que proporciona la emisora a las antenas se mantiene constante, ¿cómo será la potencia que radia cada una de las antenas?

2.- ¿Es posible la propagación de un campo electromágnético en el seno de un plasma para cualquier valor de la frecuencia? Razone la respuesta.

3.- Analice el modo fundamental en una guía rectangular. ¿Qué relación debe existir entre las dimensiones de la guía para que el rango de frecuencias de operación del modo fundamental sea el máximo posible?

PROBLEMA 1: Dos antenas isotrópas 1 y 2 situadas en el eje Z, alimentadas con corrientes de amplitud $A_1 = 1$ y $A_2 = A$ y con una diferencia de fase δ, emiten ondas electromagnéticas con una frecuencia de 300 MHz. La primera antena se halla en el origen de coordenadas. Determinar cuál debe ser la distancia de separación entre ambas y los valores de A y δ para obtener el diagrama de radiación mostrado en la figura 1.

PROBLEMA 2: En una línea de transmision de impedancia característica $Z_0 = 50\ \Omega$, terminada en una carga $Z_L = 100 + j50\ \Omega$, se propagan ondas de longitud de onda $\lambda = 2,45$ cm. Entre la carga y la línea principal se ha colocado una sección de línea de longitud $d = 1,53$ cm y una seccion de línea cortocircuitada en paralelo de longitud $l = 0,306$ cm (es decir, se ha colocado un mono-stub). Calcule mediante el diagrama de Smith el valor de la impedancia en el punto de unión del stub e indique si la línea ha quedado adaptada con los valores de d y l dados anteriormente (justifique la respuesta). Busque los valores mínimos de d y l, distintos de los anteriores, que consigan adaptar la carga Z_L a la línea.



FORMULARIO

1.- Sistemas de transmisión con simetría traslacional

$$E_t = \frac{1}{k^2-\beta^2}\left(j\omega\mu\vec{u}_z \times \nabla_t H_z \mp j\beta\nabla_t E_z\right) \qquad H_t = \frac{1}{k^2-\beta^2}\left(-j\omega\varepsilon\vec{u}_z \times \nabla_t E_z \mp j\beta\nabla_t H_z\right)$$

2.- Líneas de transmisión

$$Z_N = \frac{Z_{LN} + j\tan(\beta l)}{1 + jZ_{LN}\tan(\beta l)} \qquad v(l) = a_o^+ e^{j\beta l}(1+\rho) \qquad I(l) = \frac{1}{2Z_o} a_o^+ e^{j\beta l}(1-\rho)$$

3.- Guias rectangulares

Modos TE

$$H_{zmn} = A_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$H_{xmn} = \left(j\frac{\beta_{mn}}{\gamma_{mn}^2}\frac{m\pi}{a}\right)A_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$H_{ymn} = \left(j\frac{\beta_{mn}}{\gamma_{mn}^2}\frac{n\pi}{b}\right)A_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$E_{xmn} = \left(j\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{k}{\gamma_{mn}^2}\frac{n\pi}{b}\right)A_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$E_{ymn} = \left(-j\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{k}{\gamma_{mn}^2}\frac{m\pi}{a}\right)A_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

Modos TM

$$E_{zmn} = B_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$E_{xmn} = \left(-j\frac{\beta_{mn}}{\gamma_{mn}^2}\frac{m\pi}{a}\right)B_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$E_{ymn} = \left(-j\frac{\beta_{mn}}{\gamma_{mn}^2}\frac{n\pi}{b}\right)B_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

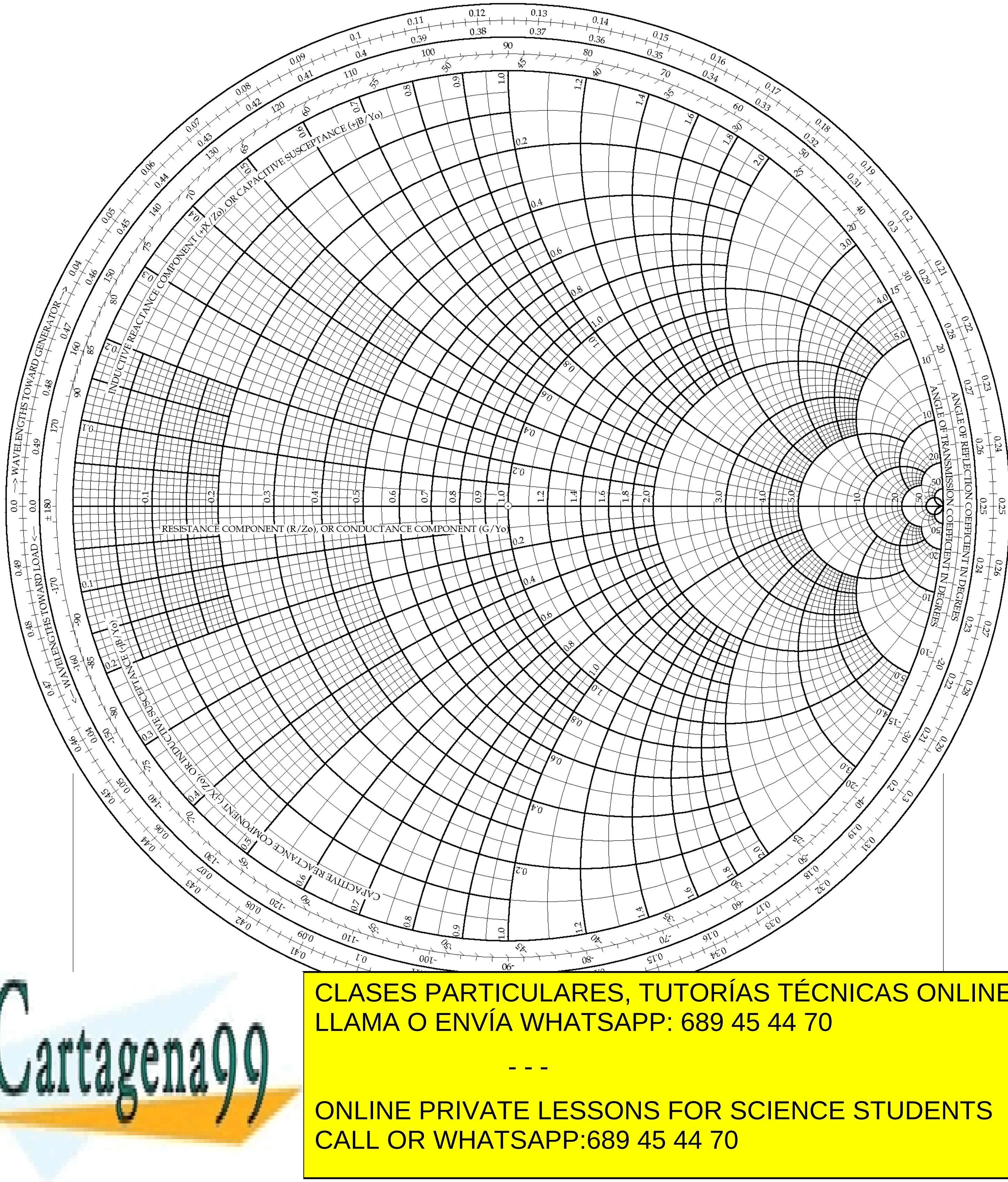
$$H_{xmn} = \left(j\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{k}{\gamma_{mn}^2}\frac{n\pi}{b}\right)B_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$H_{ymn} = \left(-j\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{k}{\gamma_{mn}^2}\frac{m\pi}{a}\right)B_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$P = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\int_{S_t}\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right)\cdot d\vec{s}\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\int_{S_t}\left(\vec{E}_t\times\vec{H}_t^*\right)\cdot d\vec{s}\right]$$

$$[Q]_{101} = \frac{\mu}{\mu_o\delta_p}\frac{\ln\left[ab\left(a^2+b^2\right)\right]}{aL\left(a^2+L^2\right)+2b\left(a^3+L^3\right)} \qquad \delta_p = \left[\frac{2}{\omega\mu_o\sigma}\right]^{1/2}$$

4.- Radiación


RESISTANCE COMPONENT (R/Zo), OR CONDUCTANCE COMPONENT (G/Yo)
INDUCTIVE REACTANCE COMPONENT (+jX/Zo), OR CAPACITIVE SUSCEPTANCE (+jB/Yo)
CAPACITIVE REACTANCE COMPONENT (-jX/Zo), OR INDUCTIVE SUSCEPTANCE (-jB/Yo)
—> WAVELENGTHS TOWARD GENERATOR —>
<— WAVELENGTHS TOWARD LOAD <—
ANGLE OF REFLECTION COEFFICIENT IN DEGREES
ANGLE OF TRANSMISSION COEFFICIENT IN DEGREES
ORIGIN